Permutări, aranjamente, combinări

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n =$ „*n factorial*"; $k \in \mathbb{N}, k \le n$.

$P_n = n! =$ „*permutări de n elemente*".

$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} =$ „*aranjamente de n elemente luate câte k*".

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} =$ „*combinări de n elemente luate câte k*".

Binomul lui Newton

$a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n \\ (a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \text{ - termenul general al dezvoltării } (a+b)^n \\ T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k \text{ - termenul general al dezvoltării } (a-b)^n \end{cases}$$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$

Mulțimea numerelor complexe

$\mathbb{C} = \{a + bi \,/\, a; b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$.

Fie $z = a + bi$.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \overset{not}{=} r$ = modulul lui z.

$\alpha = \arg z = \operatorname{tg} \dfrac{b}{a} =$ argumentul lui z.

$z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ = forma trigonometrică a lui z.

Proprietăți:

Fie $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$

$z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

Formulele lui Moivre:

$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)] \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)] \\ z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) \end{cases}$$

Matrici

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) =$ mulțimea matricilor cu m linii și n coloane cu coeficienți din $\mathbb{R}$.

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ matricea cu m linii și n coloane.

Operații cu matrici:

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ și $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

1) Adunarea: $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

2) Scăderea: $C = A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

3) Înmulțirea cu scalari $\alpha C = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

4) Înmulțirea matricilor: se pot înmulți numai matricile de forma

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le p}}$

$C = A \cdot B$; $C = (c_{ik})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le p}}$, unde

$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$

Observație: înmulțirea matricilor nu este întotdeauna comutativă, adică, în general, avem $AB \ne BA$.

Transpusa unei matrice: dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, atunci transpunerea ei este matricea ${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}}$.

5) Ridicarea la putere: $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } k \text{ ori}}$

Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 + (-5) & 3 + 7 \\ 4 + (-8) & 5 + (-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 - (-5) & 3 - 7 \\ 4 - (-8) & 5 - (-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-8) & 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-9) \\ 4 \cdot (-5) + 5 \cdot (-8) & 4 \cdot 7 + 5 \cdot (-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 & -13 \\ -60 & -17 \end{pmatrix}$$

Determinanți

- determinantul de ordinul 2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

- determinantul de ordinul 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Legi de compoziție

Fie M o mulțime nevidă. Aplicația „$\star$” : $M \times M \to M$ se numește **lege de compoziție internă.**

Exemplu: „+” : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x; y) \to x + y$ – adunarea pe $\mathbb{R}$.

Proprietăți:

1) O lege de compoziție „$\star$” este **asociativă** $\Leftrightarrow (x \star y) \star z = x \star (y \star z), \forall x, y, z \in M$.

2) O lege de compoziție „$\star$”este **comutativă** $\Leftrightarrow x \star y = y \star x, \forall x, y \in M$.

3) O lege de compoziție „$\star$” **admite element neutru** $\Leftrightarrow \exists e \in M$ astfel încât $x \star e = e \star x = x$, $\forall x \in M$.

4) Un element $x \in M$ este **simetrizabil** $x \Leftrightarrow \exists x' \in M$ unic astfel încât $x \star x' = x' \star x = e$.

Exemplu:

Fie „+” : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) „+” este asociativă $\Leftrightarrow (x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

2) „+” este comutativă $\Leftrightarrow x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

3) „+” admite elementul neutru $0 \Leftrightarrow x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

4) Orice element $x \in \mathbb{R}$ este simetrizabil (are un opus în cazul adunării) $\Leftrightarrow \exists x' = -x$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Parte stabilă

Fie M o mulțime nevidă și „$\star$” o lege de compoziție pe M. Spunem că submulțimea $H \subset M$ nevidă este **parte stabilă a lui M în raport cu** „$\star$” dacă $\forall x, y \in H$ avem $x \star y \in H$.

Exemplu:

Fie $(\mathbb{Z}; +)$. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}; \mathbb{N}$ parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu „+”.

Monoizi

Fie $M \neq \varnothing$ o mulțime și „$\star$” o lege de compoziție.

Spunem că ***(M; $\star$)*** **este monoid** dacă și numai dacă:

M1) „$\star$” este asociativă;

M2) „$\star$” admite element neutru.

Dacă „$\star$” este comutativă atunci *(M; $\star$)* este **monoid comutativ**.

Exemple:

$(\mathbb{N}; +)$; $(\mathbb{Z}; +)$; $(\mathbb{Q}; +)$; $(\mathbb{R}; +)$; $(\mathbb{C}; +)$; $(\mathbb{N}; \cdot)$; $(\mathbb{Z}; \cdot)$; $(\mathbb{Q}; \cdot)$; $(\mathbb{R}; \cdot)$; $(\mathbb{C}; \cdot)$; monoizi comutativi.

Grupuri

Fie $M \neq \varnothing$ o mulțime și „$\star$” o lege de compoziție. Spunem că **$(M; \star)$ este grup** dacă și numai dacă:

G1) „$\star$” este asociativă;

G2) „$\star$” admite element neutru;

G3) Orice element $x \in M$ este simetrizabil.

Dacă „$\star$” este comutativă atunci $(M; \star)$ este **grup comutativ** sau **abelian**.

Exemple:

1) $(\mathbb{Z}; +)$; $(\mathbb{Q}; +)$; $(\mathbb{R}; +)$; $(\mathbb{C}; +)$; $(\mathbb{Q}^*; \cdot)$; $(\mathbb{R}^*; \cdot)$; $(\mathbb{C}^*; \cdot)$ grupuri abeliene.

2) Un grup abelian remarcabil este *grupul claselor de resturi modulo n* notat cu $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}; \hat{1}; \hat{2}; \ldots; \widehat{n-1}\}$.

Se definește „+”: $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n; (\hat{x}; \hat{y}) \to \hat{x} + \hat{y}$; $(\mathbb{Z}_n; +)$ grup.

Subgrupuri

Fie $(M; \star)$ grup și $H \subset M$, $H \neq \varnothing$. Se numește **subgrup al lui *M*** dacă „$\star$” induce pe H o lege de compoziție împreună cu care H este grup.

Exemple:

1) $(\mathbb{Z}; +)$ subgrup al lui $(\mathbb{R}; +)$

2) $(\mathbb{Q}; +)$ subgrup al lui $(\mathbb{R}; +)$

3) $(\mathbb{Q}^*; \cdot)$ subgrup al lui $(\mathbb{R}^*; \cdot)$

4) $(\mathbb{R}^*; \cdot)$ subgrup al lui $(\mathbb{C}^*; \cdot)$

Dacă $(M; \star)$ este un grup și H un subgrup al său atunci **elementul neutru al lui *H* este elementul neutru al lui *M*** și $\forall x \in H$ avem $x' \in H$.

Avem următoarele afirmații echivalente:

1) H subgrup al lui M.

2) $\forall x; y \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H$.

3) $\forall x; y \in H \Rightarrow xy \in H$ și $\forall x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

Morfisme și izomorfisme de grupuri

Fie $(M; \star)$ și $(M'; \circ)$ două grupuri.

Funcția $f : M \to M'$ se numește **morfism** (sau **omomorfism**) de grupuri dacă $f(x \star y) = f(x) \circ f(y)$.

Funcția $f : M \to M'$ morfism de grupuri se numește

- **monomorfism** dacă f este injectivă;
- **epimorfism** dacă f este surjectivă;
- **endomorfism** dacă $M = M'$.

Fie $f : M \to M'$ morfism între grupurile $(M; \cdot)$ și $(M'; \cdot)$, iar e și e' elementele neutre din grupurile $(M; \cdot)$ și respectiv $(M'; \cdot)$.

Atunci avem:

1) $f(e) = e'$

2) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}; \forall x \in M$

3) $f(x^n) = [f(x)]^n, \forall x \in M, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Funcția $f : M \to M'$, morfism de grupuri se numește **izomorfism** dacă f este **bijectivă**.